Simetrización de cuerpos convexos y desigualdades de Rogers-Shephard

Cecilia Coronas Sáez

Trabajo de fin de grado en Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: David Alonso Gutiérrez
y Julio Bernués Pardo

25 de junio de 2020

Agradecimientos

En este pequeño apartado me gustaría agradecer a aquellas personas que me han estado ayudando y apoyando a lo largo de los meses en los que he estado elaborando este trabajo de fin de grado.

En primer lugar me gustaría dar las gracias a David Alonso y a Julio Bernués por brindarme la oportunidad de realizar este trabajo bajo su dirección, así como también agradecer toda la información que han puesto a mi alcance y su disponibilidad a la hora de aconsejarme.

A mis estimados padres Ana María y Joaquín, por su apoyo, cariño, comprensión y experiencia, mi gratitud es superlativa. Siguiendo con el resto de la familia, gracias a mi hermano Oliver, no solo reconocerle todo su apoyo durante el espacio temporal que ha abarcado en mi existencia sino también por haber aportado su maravillosa y bohemia personalidad a nuestra amistad. A mi abuela Puri y al resto de mi familia de Vitoria, Almazorre, Barbastro y Zaragoza les mando un fuerte abrazo por estar siempre ahí.

A Miguel, hijo del bosque, le doy las gracias por los siete años de amistad que hemos compartido y por enseñarme cada día cosas nuevas, te quiero (no gracias). Agradecida estoy a mi compañero Jorge, que me ha dado los momentos más divertidos que he pasado en la carrera, y también a Sara, la jovialidad personificada, gran amiga y admirable compañera de estudio. Gracias también a mis compañeros Javier y Roberto por todo el apoyo. Muchas gracias a Adrián Zeravica por haber estado conmigo más allá de la academia de música y, hablando de academias y de música, no puedo olvidar mencionar a María y a Eva María por haberme enseñado el arte del piano durante más de la mitad de mi vida. A Julia, amiga de la bollipandi y de la vida misma, muchas gracias por todo.

Un saludo especial a Cati, Rampantxuski y Taiga, que aunque algunas ya no estéis os llevo a las tres en el corazón.

En definitiva, muchas gracias a todos.

Prólogo

La simetría en cuerpos convexos, que son aquellos conjuntos que vamos a tratar en profundidad en este trabajo, es una propiedad altamente deseable a la hora de estudiar dichos elementos geométricos. Entendemos que un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es simétrico si para todo elemento $x \in K$ su antípoda $-x$ también pertenece a K. Estos cuerpos están en una correspondencia uno-a-uno con las bolas unidad de normas sobre $\mathbb{R}^n$, hecho que ha propiciado que las técnicas utilizadas en el Análisis Funcional interactúen con las técnicas utilizadas en la Geometría Convexa, enriqueciendo profundamente ambas ramas de las matemáticas.

En muchas ocasiones nos encontramos con cuerpos convexos no simétricos, y quizás anhelaríamos en esos momentos que sí poseyesen dicha propiedad. Poder tener herramientas que solventen este problema, construyendo cuerpos simétricos a partir de cuerpos no simétricos a la par que se conocen relaciones entre propiedades geométricas de ambos cuerpos, es el objetivo principal que inspira este trabajo. Nos centraremos en estudiar las desigualdades de Rogers-Shephard, en las que se consideran tres simetrizaciones diferentes de un cuerpo convexo y se estudia la relación entre el volumen del cuerpo convexo simetrizado y el cuerpo convexo de partida.

Estas tres desigualdades geométricas, cuya demostración va a ser el grueso de este trabajo, fueron dadas por estos dos matemáticos para cualquier cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, y proporcionan una cota superior del volumen del cuerpo diferencia $K-K$ y de los cuerpos simétricos $\mathrm{conv}\{K\times\{0\},\ -K\times\{1\}\}$ (simétrico respecto de $0\times\left\{\frac{1}{2}\right\}$) y $\mathrm{conv}\{K,\ -K\}$ (si $0\in K$), en términos del volumen de K. Estas cotas superiores son:

$$|K-K| \leq \binom{2n}{n}|K|,$$

$$|\mathrm{conv}\{K\times\{0\},\ -K\times\{1\}\}| \leq \frac{2^n}{n+1}|K|,$$

$$|\mathrm{conv}\{K,\ -K\}| \leq 2^n|K|.$$

La desigualdad que relaciona el volumen del cuerpo diferencia es una desigualdad ya clásica en geometría convexa y fue la primera de las tres en ser demostrada por Rogers y Shephard en 1957. Posteriormente, en 1958, dieron otra demostración de la primera desigualdad y demostraron las otras dos, obteniendo las tres desigualdades como consecuencia de la siguiente desigualdad, la cual relaciona el volumen de un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con el volumen de la sección de un subespacio k-dimensional H y el volumen de su proyección sobre el subespacio ortogonal $H^\perp$:

$$|P_{H^\perp}K|\cdot|K\cap H| \leq \binom{n}{k}|K|.$$

Para demostrar esta familia de desigualdades es esencial la desigualdad de Brunn-Minkowski. Esta es una desigualdad central en el estudio de la Geometría Convexa y afirma, en una de sus diferentes versiones equivalentes, que para cualesquiera $A,\ B\subseteq\mathbb{R}^n$ borelianos no vacíos y para todo $0\leq\lambda\leq 1$ se tiene que

$$|(1-\lambda)A+\lambda B| \geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda}.$$

Abstract

A very desirable property for the study of the convex bodies, which are those sets that we are going to consider in this work, is the symmetry. We understand that a convex body $K \subseteq \mathbb{R}^n$ is symmetric if for every element $x \in K$ its antipodal -x also belongs to K. Symmetric convex bodies are in a one-to-one correspondence with the unit balls of finite-dimensional convex bodies, which is a fact that has allowed the techniques of both Funcional Analysis and Convex Geometry interact with each other. The main purpose of this work resides in building symmetric convex bodies from non-symmetric convex bodies, relating at the same time the geometric properties of the symmetrized body to the convex body which generated it.

Thus, the main body of this project is focused on understanding and proving Rogers-Shephard's inequalities, in which three different symmetrizations of a convex body will be considered and the relation between the volume of the symmetrized body and the initial body will be studied. These three geometric inequalities were given by Rogers and Shephard for any convex body $K \subseteq \mathbb{R}^n$ and they provide an upper bound of the symmetrized body volume in terms of the volume of K. These upper bounds are:

$$|K-K| \leq \binom{2n}{n}|K|,$$

$$|\text{conv}\{K \times \{0\},\ -K \times \{1\}\}| \leq \frac{2^n}{n+1}|K|,$$

$$|\text{conv}\{K,\ -K\}| \leq 2^n|K|,$$

where $K-K$ is the symmetric difference body, $\text{conv}\{K \times \{0\},\ -K \times \{1\}\}$ is symmetric with respect to $0 \times \{\frac{1}{2}\}$ and we have to keep in mind that the third inequality is true as long as $0 \in K$.

In order to understand and prove these inequalities, which we will see in Chapter 3 of this work, we will give some first results about convexity, as well as about convex sets and convex functions, in Chapter 1. We stress out the following:

Let $A \subseteq \mathbb{R}^n$ be a set; A is convex if for any pair of points $x, y \in A$ it is true that $[x,y] \subseteq A$, i.e., if $(1-\lambda)x + \lambda y \in A, \forall\, x,\ y \in A$, $0 \leq \lambda \leq 1$. If a set is convex, compact and has a non-empty interior, we call it a convex body.

Once we have the convex set notion, it is essential to give the Minkowski's sum definiton. Given two convex sets A and B, the Minkowski's sum is given by:

$$A+B := \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\},$$

this set being also convex. Another way to express this is:

$$A+B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cap (x-B) \neq \emptyset\}.$$

Moreover, we introduce a concept that will be used frequently in Chapter 3. This is the concept of convex hull of a set, which is denoted by $\mathrm{conv}\{A\}$, where $A \subseteq \mathbb{R}^n$, and it is defined as the set of all convex combinations of any finite subset of elements of A. As its name suggest, $\mathrm{conv}\{A\}$ is a convex set.

In the field of convex functions it is worth noting, obviously, the definition of the convex function as follows: a function $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ is convex if $\{f = -\infty\} = \emptyset$, $\{f = \infty\} \neq \mathbb{R}^n$ and if

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y),$$

$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n$ and $\forall\, 0 \leq \lambda \leq 1$. A function f will be called concave when its opposite -f is a convex function.

We will deal in our work with some functions which, while they are not necessarily convex, they will satisfy some convexity assumptions. This convexity assumption leads us to the concept of p-concavity, which we will introduce here in Chapter 1 and will be used in Chapter 3. A function $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ is said to be p-concave for $p > 0$ if f^p is a concave function.

After the generalities about convexity seen in Chapter 1, in Chapter 2 we will study the Brunn-Minkowski's inequality, which is essential for the proof of the three Rogers-Shephard's inequalities, and provides a relation between the volume of two non-empty compact sets in $\mathbb{R}^n$ and the volume of their sum. It can be expressed in the following equivalent ways.

a) $|(1-\lambda)A+\lambda B| \geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda}$, for all non-empty Borel sets $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$ and for all $0 \leq \lambda \leq 1$;

b) $|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}$, for all non-empty Borel setss $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$;

c) $|(1-\lambda)A+\lambda B|^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}}$, for all non-empty Borel sets $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$ and for all $0 \leq \lambda \leq 1$.

The inequality a) is obtained by taking $f = \chi_A$, $g = \chi_B$ and $h = \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}$ (characteristic functions of A, B and $(1-\lambda)A+\lambda B$ respectively) in Prépoka-Leindler's inequality, which we will also prove in Chapter 2. It tells us that given $f,\ g,\ h$ three measurable non-negative functions defined in $\mathbb{R}^n$ and given $0 \leq \lambda \leq 1$ such that $f(x)^{1-\lambda}g(y)^{\lambda} \leq h(z)$, as long as $z = (1-\lambda)x+\lambda y$, then we have:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy\right)^{\lambda} \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z)dz.$$

Finally, in Chapter 3 we give and prove the three Rogers-Shephard's inequalities above mentioned. The first inequality,

$$|K-K| \leq \binom{2n}{n}|K|,$$

with $K \subseteq \mathbb{R}^n$ convex body, is a classic inequality in convex geometry and it was the first of the three to be demonstrated by Rogers and Shephard in 1957. Later, in 1958, they gave another proof of the first inequality and proved the other two as a consequence of the following inequality. It relates the volume of a convex body K in $\mathbb{R}^n$ with the volume of a k-dimensional subspace H's section and the volume of its projection onto $H^{\perp}$,

$$|P_{H^{\perp}}K| \cdot |K \cap H| \leq \binom{n}{k}|K|.$$

Índice general

Capítulo 1

Convexidad - Generalidades

En este capítulo vamos a introducir los conceptos básicos acerca de conjuntos convexos y funciones convexas que vamos a utilizar. Información más profunda sobre estos conceptos se puede encontrar en [7], [8] o [9].

1.1. Conjuntos convexos

Definición. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si para cualquier par de puntos $x, y \in A$ se cumple que $[x,y] \subseteq A$, es decir, si $(1-\lambda)x + \lambda y \in A, \forall\, x,\ y \in A$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Como consecuencia inmediata de esta definición vemos que la intersección de conjuntos convexos es convexa; que si A es convexo, entonces $\lambda A := \{\lambda a \mid a \in A\}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$, también lo es; y que imágenes y preimágenes afines de conjuntos convexos son convexas.

Además, si A y B son conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$, entonces la suma de Minkowski

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

es convexa. Veámoslo: sean $x,\ y \in A + B$, por construcción podemos escribir $x = a_1 + b_1$, $y = a_2 + b_2$, con $a_1,\ a_2 \in A$ y $b_1,\ b_2 \in B$. Sea ahora $\lambda \in [0,1]$, entonces $(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)a_1 + (1-\lambda)b_1 + \lambda a_2 + \lambda b_2 = [(1-\lambda)a_1 + \lambda a_2] + [(1-\lambda)b_1 + \lambda b_2] \in A + B$, por ser A y B convexos.

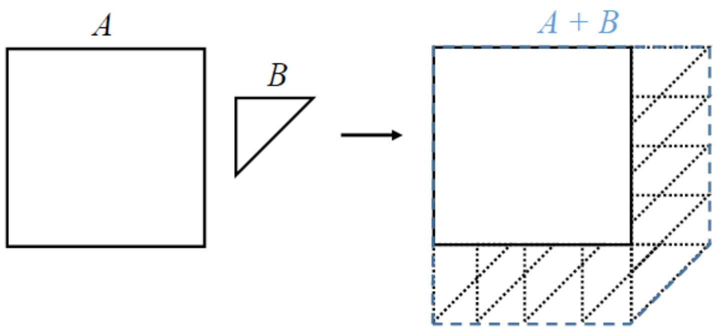

Figura 1.1: Suma de Minkowski

Otra forma de expresar la suma de Minkowski es

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cap (x - B) \neq \emptyset\}.$$

Veamos por qué:

Sea $x \in A+B$, entonces x se puede expresar como $x = a+b$, con $a \in A$ y $b \in B$. Así, $a = x-b$ pertenece a A porque $a \in A$ y también $a \in x-B$, pues $b \in B$. Por tanto, como a pertenece a ambos conjuntos, $A \cap (x-B) \neq \emptyset$ y con esto obtenemos que $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cap (x-B) \neq \emptyset\}$, es decir, $A+B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cap (x-B) \neq \emptyset\}$.

Estudiemos ahora el segundo contenido:
Sea ahora $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $A \cap (x-B) \neq \emptyset$. Esto implica que existe un $y \in A \cap (x-B)$, y por tanto $y \in A$ e $y \in (x-B)$, y este último contenido nos da que $x-y \in B$. Por tanto, $x = y+(x-y) \in A+B$, es decir, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cap (x-B) \neq \emptyset\} \subseteq A+B$, y con el doble contenido obtenemos la igualdad entre conjuntos, como queríamos demostrar.

Una propiedad de los conjuntos convexos es:

Proposición 1.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, $\lambda A + \mu A = (\lambda+\mu)A$ pra todo $\lambda,\ \mu > 0$ si y solo si A es convexo.*

Demostración. Supongamos primeramente que A es convexo. Para un $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cualquiera y $\lambda, \mu > 0$, trivialmente tenemos que $\lambda A + \mu A \supseteq (\lambda+\mu)A$. Ahora, si $x \in \lambda A + \mu A$ se tiene entones que $x = \lambda a + \mu b$, con $a, b \in A$ y, reescribiendo,

$$x = (\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}a + \frac{\mu}{\lambda+\mu}b\right)$$

y como $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}a + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}b \in A$ por ser A convexo y tenerse que $a, b \in A$, se tiene que $\lambda A + \mu A \subseteq (\lambda+\mu)A$, de donde obtenemos la igualdad.

Recíprocamente, supongamos que $\lambda A + \mu A = (\lambda+\mu)A$ para cualquier $\lambda,\ \mu > 0$. Entonces, para todo $\lambda \in [0,\ 1]$, tomando $\mu = 1-\lambda$, se tiene que $\lambda A + (1-\lambda)A = (\lambda+1-\lambda)A = A$, y queda probado que A es convexo.

□

Definición. El punto $x \in \mathbb{R}^n$ es una combinación convexa de los puntos $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ tales que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ y verificando que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Definición. Para $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la envolvente convexa de A es el conjunto de todas las combinaciones convexas de cualquier subconjunto finito de elementos de A. Se denota por $\mathrm{conv}\{A\}$.

Como consecuencia de esta definición, veamos que $\mathrm{conv}\{A\}$ es convexo.

Proposición 1.2. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, el conjunto* $\mathrm{conv}\{A\}$ *es convexo.*

Demostración. Sean $x,\ y \in \mathrm{conv}\{A\}$ y sea $\lambda \in [0,1]$. Probemos que $(1-\lambda)x + \lambda y \in \mathrm{conv}\{A\}$.
Como $x,\ y \in \mathrm{conv}\{A\}$, podemos escribir $x = \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i x_i$, con $x_1, \ldots, x_{k_1} \in A$ y $\sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i = 1$; e $y = \sum_{i=1}^{k_2} \mu_i y_i$, con $y_1, \ldots, y_{k_2} \in A$ y $\sum_{i=1}^{k_2} \mu_i = 1$. Entonces,

$$(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i x_i + \lambda \sum_{i=1}^{k_2} \mu_i y_i = \sum_{i=1}^{k_1} (1-\lambda)\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{k_2} \lambda \mu_i y_i \in \mathrm{conv}\{A\},$$

pues

$$\sum_{i=1}^{k_1} (1-\lambda)\lambda_i = (1-\lambda), \quad \sum_{i=1}^{k_2} \lambda \mu_i = \lambda \ \text{ y, por tanto, } \ \sum_{i=1}^{k_1} (1-\lambda)\lambda_i + \sum_{i=1}^{k_2} \lambda \mu_i = (1-\lambda)+\lambda = 1,$$

y $x_1,\dots,x_{k_1},\ y_1,\dots,y_{k_2}\in A$.

□

La definición de envolvente convexa nos da la noción necesaria para la siguiente:

Definición. Se llama símplex a la envolvente convexa de $n+1$ puntos afinmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) *Si* $A\subseteq\mathbb{R}^n$ *es convexo, entonces* $\operatorname{conv}\{A\}=A$.

b) $\operatorname{conv}\{A\}$ *es la intersección de todos los conjuntos convexos de* $\mathbb{R}^n$ *conteniendo* A.

c) *Si* A, $B\subseteq\mathbb{R}^n$*, entonces* $\operatorname{conv}\{A+B\}=\operatorname{conv}\{A\}+\operatorname{conv}\{B\}$.

Demostración. a) Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$ convexo. Trivialmente, $A\subseteq\operatorname{conv}\{A\}$. Veamos por inducción que A contiene todas las combinaciones convexas de k elementos de A, para cualquier $k\geq 1$.
Para $k=1$ es trivial.
Para $k=2$ se cumple por la definición de convexidad.
Supongamos que se cumple para $k-1$, y sea $x\in\operatorname{conv}\{A\}$ combinación convexa de k elementos de A. Podemos suponer que $x=\sum_{k=1}^{k}\lambda_i x_i$, donde $x_1,\dots,x_k\in A$, $\sum_{k=1}^{k}\lambda_i=1$, y $\lambda_1,\dots,\lambda_k>0$ sin pérdida de generalidad. Entonces,

$$x=(1-\lambda_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i+\lambda_k x_k\in A,$$

debido a que $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}>0$, $\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}=\frac{1-\lambda_k}{1-\lambda_k}=1$, y denotando $y_k=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k}x_i$, con esto tenemos que $y_k\in A$ por hipótesis de inducción.

Así, $x=(1-\lambda_k)y_k+\lambda_k x_k\in A$, por ser A convexo y, por tanto, $\operatorname{conv}\{A\}\subseteq A$ y se da la igualdad.

b) Para un $A\subseteq\mathbb{R}^n$ cualquiera, sea $C(A)$ la intersección de todos los conjuntos convexos $K\subseteq\mathbb{R}^n$ conteniendo A, siendo $C(A)$ convexo por ser la intersección de conjuntos convexos. Como $A\subseteq\operatorname{conv}\{A\}$ y al ser $\operatorname{conv}\{A\}$ convexo, tenemos que $C(A)\subseteq\operatorname{conv}\{A\}$. Sabemos que todo conjunto convexo K tal que $A\subseteq K$ cumple que $\operatorname{conv}\{A\}\subseteq\operatorname{conv}\{K\}=K$, y como $A\subseteq C(A)$ trivialmente, $\operatorname{conv}\{A\}\subseteq\operatorname{conv}\{C(A)\}=C(A)$, lo que prueba la igualdad.

c) Sean $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$. Sea $x\in\operatorname{conv}\{A+B\}$, así $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(a_i+b_i)$, con $a_i\in A$, $b_i\in B$, $\lambda_i\geq 0$ y $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$; y por tanto, $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i b_i\in\operatorname{conv}\{A\}+\operatorname{conv}\{B\}$, luego obtenemos que $\operatorname{conv}\{A+B\}\subseteq\operatorname{conv}\{A\}+\operatorname{conv}\{B\}$.
Por otra parte, sea $x\in\operatorname{conv}\{A\}+\operatorname{conv}\{B\}$, luego podemos escribir $x=\sum_{i=1}^{k_1}\lambda_i a_i+\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j b_j$, con $a_i\in A$, $b_j\in B$, $\lambda_i,\mu_j\geq 0$, $\sum_{i=1}^{k_1}\lambda_i=\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j=1$. Se puede escribir

$$x=\sum_{(i,j)\in I}\lambda_i\mu_j(a_i+b_j)\in\operatorname{conv}\{A+B\},$$

donde $I=\{(i,\ j)\mid 1\leq i\leq k_1,\ 1\leq j\leq k_2\}$. Con esto, $\operatorname{conv}\{A\}+\operatorname{conv}\{B\}\subseteq\operatorname{conv}\{A+B\}$ y se da la igualdad.

□

Consideremos ahora la siguiente noción:

Definición. Llamaremos cuerpo convexo a un conjunto convexo, compacto y con interior no vacío.

Estudiemos a continuación la relación entre normas y cuerpos convexos.

Definición. Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ que cumple que contiene a 0 en su interior. Definimos pues el funcional $\|\cdot\|_K$ en $\mathbb{R}^n$ como

$$\|\cdot\|_K := \text{ínf}\{\varepsilon \geq 0 \mid x \in \varepsilon K\}.$$

A este funcional se le denomina como el funcional de Minkowski de K.

Veamos que este funcional, bajo unas determinadas condiciones, es una norma en $\mathbb{R}^n$ cuya bola unidad cerrada es K:

Proposición 1.3. *Si K es un cuerpo convexo y simétrico en $\mathbb{R}^n$, entonces $\|\cdot\|_K$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Veamos primero que $0 \in int(K)$. Como K tiene interior no vacío, existe un $x_0 \in K$ y un $\varepsilon > 0$ tales que $B(x_0,\ \varepsilon) \subseteq K$, donde $B(x_0,\ \varepsilon)$ representa la bola Euclídea de centro x_0 y radio ε. Como K es simétrico se tiene que $B(-x_0,\ \varepsilon) \subseteq K$ y, por lo tanto, como K es convexo,

$$\frac{1}{2}B(x_0,\ \varepsilon) + \frac{1}{2}B(-x_0,\ \varepsilon) = \frac{1}{2}(x_0 + B(0,\ \varepsilon)) + \frac{1}{2}(-x_0 + B(0,\ \varepsilon)) =$$
$$= B(0,\ \varepsilon) \subseteq K,$$

y así se ve que $0 \in int(K)$, con lo cual $\|\cdot\|_K$ está bien definido.

Para probar ahora que $\|\cdot\|_K$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, probemos que nuestro funcional cumple las tres propiedades que definen a las normas.

En primer lugar, veamos que $\|x\|_K \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, y que $\|x\|_K = 0$ si y solo si $x = 0$. Por definición del funcional de Minkowski se tiene que $\|x\|_K \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Además, si $x \neq 0$ la semirrecta desde 0 que pasa por x interseca con K en un segmento cerrado y acotado no trivial $[0,\ \alpha x]$, con $0 < \alpha < \infty$, ya que $0 \in int(K)$ y K está acotado.

Así, $\|x\|_K = \alpha^{-1} > 0$ por ser también $\alpha > 0$, y por tanto $\|x\|_K$ es un número real estrictamente positivo, siempre y cuando se cumpla que $x \neq 0$. Si $x = 0$ se cumple trivialmente que $\|x\|_K = 0$.

A continuación, veamos que $\|\beta x\|_K = \beta\|x\|_K,\ \forall\, \beta \geq 0$. Esto se sigue directamente de la definición, pues

$$\|\beta x\|_K = \text{ínf}\{\varepsilon \geq 0 \mid \beta x \in \varepsilon K\} = \text{ínf}\left\{\varepsilon \geq 0 \mid x \in \frac{\varepsilon}{\beta}K\right\} =$$
$$= \beta\, \text{ínf}\left\{\frac{\varepsilon}{\beta} \geq 0 \mid x \in \frac{\varepsilon}{\beta}K\right\} = \beta\|x\|_K.$$

Además, la simetría de K implica que $\|-x\|_K = \|x\|_K$.

Por último, queremos ver que $\|x+y\|_K \leq \|x\|_K + \|y\|_K$ para todos $x,\ y \in \mathbb{R}^n$. Si $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0,\ y \neq 0$, definimos

$$x' := \frac{x}{\|x\|_K}, \qquad y' := \frac{y}{\|y\|_K},$$

entonces $x',\ y' \in K$, ya que la línea que pasa a través de 0 y de x se encuentra con K en el segmento cerrado $\left[\frac{-x}{\|x\|_K},\ \frac{x}{\|x\|_K}\right]$. Así, por la convexidad de K, tenemos que

$$z := \frac{\|x\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K} x' + \frac{\|y\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K} y' = \frac{x+y}{\|x\|_K + \|y\|_K} \in K,$$

y $\|z\|_K \leq 1$.

Aplicando el funcional de Minkowski a z obtenemos $\|z\|_K = \dfrac{\|x+y\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K}$ y por tanto, $\dfrac{\|x+y\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K} \leq 1$, lo que implica que $\|x+y\|_K \leq \|x\|_K + \|y\|_K$. Esta última desigualdad es cierta trivialmente si x o y son 0.

□

Terminamos esta sección introduciendo más notación que aparecerá más adelante:
Dado un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, o de manera más general, un boreliano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotamos por $|A|$ su volumen, es decir, su medida de Lebesgue. $G_{n,\,k}$ denota el conjunto de subespacios lineales k-dimensionales en $\mathbb{R}^n$ y, dado $H \in G_{n,\,k}$, $P_H K$ denota la proyección ortogonal de K sobre H, y $K \cap H$ la intersección de K con H.

1.2. Funciones convexas

El estudio de los conjuntos convexos está íntimamente relacionado con las funciones convexas. Para funciones convexas es conveniente considerar la recta real extendida $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ con las reglas usuales. Estas son, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < \lambda < \infty,$$

$$\infty + \infty = \lambda + \infty = \infty + \lambda = \infty,$$

$$-\infty - \infty = -\infty + (-\infty) = \lambda - \infty = -\infty + \lambda = -\infty$$

y, finalmente,

$$\lambda\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda > 0, \\ 0 & \text{si } \lambda = 0, \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ y dado $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$, usamos la siguiente notación:

$$\{f = \alpha\} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathrm{x}) = \alpha\}.$$

Definimos $\{f \leq \alpha\}$, $\{f < \alpha\}$ y similares de manera análoga.

Definición. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ es convexa si f es propia, es decir, si $\{f = -\infty\} = \emptyset$ y $\{f = \infty\} \neq \mathbb{R}^n$; y

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y),$$

$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\, 0 \leq \lambda \leq 1$.

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}$. En este caso, f se dice que es una función convexa si su extensión $\bar{f}$ definida por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D, \\ \infty & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus D. \end{cases}$$

es convexa.

Veamos ahora una definición análoga:

Definición. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ es cóncava si $-f$ es propia, es decir, si $\{f = \infty\} = \emptyset$ y $\{f = -\infty\} \neq \mathbb{R}^n$; y

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y),$$

$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\, 0 \leq \lambda \leq 1$.

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}$. En este caso, f se dice que es una función cóncava si su extensión $\bar{f}$ definida por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D, \\ -\infty & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus D. \end{cases}$$

es cóncava.

Notar que en ambas definiciones D ha de ser necesariamente convexo, y que una función f es cóncava si y solo si $-f$ es convexa.

Definición. Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ se dice que es p-cóncava para $p > 0$ si f^p es cóncava.

Un resultado importante sobre funciones convexas es el siguiente:

Teorema 1.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ una función convexa. Entonces, f es continua en el interior de su dominio,* $\operatorname{int}\operatorname{dom}\{f\}$.

Demostración. Sea $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\{f\}$. Podemos elegir un símplex S tal que $x_0 \in \operatorname{int}\{S\} \subseteq S \subseteq \operatorname{int}\operatorname{dom}\{f\}$ y un número $\rho > 0$ tal que $B(x_0, \rho) \subseteq S$, donde $B(x_0, \rho)$ es la bola Euclídea de centro x_0 y radio ρ. Para $x \in S$, podemos escribir $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, con $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, donde $x_1, \ldots, x_{n+1}$ son los vértices de S, y se deduce que, como f es convexa,

$$f(\mathrm{x}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \leq c := \max\{f(x_1), \ldots, f(x_{n+1})\}.$$

Sea ahora $y = x_0 + \alpha u$, con $\alpha \in [0,1]$ y $|u| = \rho$. Si $y = (1-\alpha)x_0 + \alpha(x_0 + u)$ obtenemos $f(y) \leq (1-\alpha) f(x_0) + \alpha f(x_0 + u)$, y así

$$f(y) - f(x_0) \leq \alpha(c - f(x_0)),$$

ya que $x_0 + u \in S$.

Por otra parte, recordando que $y = x_0 + \alpha u$, se tiene que

$$\frac{1}{1+\alpha} y + \frac{\alpha}{1+\alpha}(x_0 - u) = \frac{y + \alpha x_0 - \alpha u}{1+\alpha} = \frac{\alpha u + x_0 + \alpha x_0 - \alpha u}{1+\alpha} = \frac{x_0(1+\alpha)}{1+\alpha} = x_0$$

y, tomando funciones, $f(x_0) \leq \frac{1}{1+\alpha} f(y) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(x_0 - u)$, lo que nos da

$$f(x_0) - f(y) \leq \alpha(c - f(x_0)),$$

ya que $x_0 - u \in S$.

Así, $|f(y) - f(x_0)| \leq \frac{1}{\rho}[c - f(x_0)]|y - x_0|\ \forall y \in B(x_0, \rho)$, lo que nos muestra la continuidad de f en x_0. Por tanto, f es continua en $\operatorname{int}\operatorname{dom}\{f\}$.

$\square$

El siguiente lema nos dice que si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y $f : D \to [0, +\infty)$ es una función cóncava, entonces o f no se anula en $\mathrm{int}\{D\}$ o es idénticamente nula.

Lema 1.1. *Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ es cóncava y f no es idénticamente nula entonces f no se anula en el interior de D,* $\mathrm{int}\{D\}$.

Demostración. Como f no es idénticamente nula, existe $x \in D$ tal que $f(x) > 0$. Sea $z \in \mathrm{int}\{D\}$. Como $z \in \mathrm{int}\{D\}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(z, \varepsilon) \subseteq D$. Tomando $y = z + \frac{\varepsilon}{2} \frac{z-x}{|z-x|} \in B(z, \varepsilon) \subseteq D$ se tiene que $y \neq x$ y que

$$z = \frac{\varepsilon}{2|z-x|+\varepsilon} x + \frac{2|z-x|}{2|z-x|+\varepsilon} y = (1-\lambda)x + \lambda y,$$

con $\lambda = \frac{2|z-x|}{2|z-x|+\varepsilon} \in (0, 1)$. Por lo tanto, como f es cóncava,

$$f(z) = f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) > 0,$$

ya que $f(x) > 0$ y $f(y) \geq 0$.

□

Para el siguiente resultado, conviene definir antes las siguientes nociones:

Definición. Sea $f : D \to \mathbb{R}$, donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, el epígrafo de f, denotado por $\mathrm{epi}\{f\}$, es el subconjunto

$$\mathrm{epi}\{f\} = \{(x_1, \ldots, x_n, x) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D,\ x \geq f(x_1, \ldots, x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Teorema 1.3. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$, donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces f es una función convexa si y solo si su epígrafo es convexo.*

Demostración. Para todo $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ denotamos por $(\bar{x}, x)$ al punto $(x_1, \ldots, x_n, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Supongamos primeramente que f es convexa. Sean $(\bar{x}, x)$, $(\bar{y}, y) \in epi(f)$, esto implica por definición que $\bar{x}$, $\bar{y} \in D$ y que $x \geq f(\bar{x})$, $y \geq f(\bar{y})$. Sean λ, $\mu \geq 0$, tales que $\lambda + \mu = 1$. Entonces la convexidad de f nos da que $f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) \leq \lambda f(\bar{x}) + \mu f(\bar{y}) \leq \lambda x + \mu y$. Con esto, $\lambda(\bar{x}, x) + \mu(\bar{y}, y) = (\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}, \lambda x + \mu y) \in epi(f)$, por lo que $epi(f)$ es convexo.

Recíprocamente, supongamos que $epi(f)$ es convexo. Sean $\bar{x}$, $\bar{y} \in D$ y sean λ, $\mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$. Como $epi(f)$ es convexo, el punto $\lambda(\bar{x}, f(\bar{x})) + \mu(\bar{y}, f(\bar{y})) = (\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}, \lambda f(\bar{x}) + \mu f(\bar{y})) \in epi(f)$. Así, $f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) \leq \lambda f(\bar{x}) + \mu f(\bar{y})$, lo que nos muestra que f es una función convexa. □

Como consecuencia de este teorema se obtiene que si $f : D \to \mathbb{R}$ es cóncava entonces, el hipógrafo de f definido por

$$\{(x_1, \ldots, x_n, x) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D,\ x \leq f(x_1, \ldots, x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

es convexo.

Capítulo 2

Desigualdad de Brunn-Minkowski

La desigualdad de Brunn-Minkowski (demostrada por Brunn en 2 y 3 dimensiones en 1887 y en dimensiones superiores por Minkowski en 1896) proporciona una relación entre el volumen de dos compactos no vacíos en $\mathbb{R}^n$ y el volumen de su suma.

Podría decirse que se trata de la desigualdad más importante en convexidad y se puede expresar de las siguientes formas equivalentes:

Teorema 2.1. *(Desigualdad de Brunn-Minkowski) Son ciertas las siguientes afirmaciones equivalentes:*

a) $|(1-\lambda)A+\lambda B| \geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda}$*, para todo* $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$ *borelianos no vacíos y para todo* $0 \leq \lambda \leq 1$*;*

b) $|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}$*, para todo* $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$ *borelianos no vacíos;*

c) $|(1-\lambda)A+\lambda B|^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}}$*, para todo* $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$ *borelianos no vacíos y para todo* $0 \leq \lambda \leq 1$.

La equivalencia entre las tres expresiones se demostrará al final del capítulo. Primeramente demostraremos la desigualdad $a)$, obteniéndola como un caso particular de la desigualdad de Prékopa-Leindler, que es una desigualdad funcional que proporciona una desigualdad de Hölder inversa.

La demostración que proporcionamos de la desigualdad de Prékopa-Leindler es original de [3], y puede encontrarse en [1] o en [4] y antes de proceder a dar una demostración de la desigualdad de Prépoka-Leindler, demostraremos el siguiente lema:

Lema 2.1. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to [0,\ +\infty)$ *una función integrable en* $\mathbb{R}^n$*. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^{+\infty} |\{f(x) \geq t\}|dt.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Aplicando el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |\{f(x) \geq t\}|dt &= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f(x)\geq t\}}(x)dxdt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty} \chi_{\{f(x)\geq t\}}(x)dtdx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{f(t)} dtdx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2. *(Desigualdad de Prépoka-Leindler) Sean f, g, h tres funciones medibles no negativas definidas en $\mathbb{R}^n$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ tales que $f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \leq h(z)$, siempre que $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Entonces:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy \right)^{\lambda} \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z)dz.$$

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre la dimensión n de $\mathbb{R}^n$.

Supongamos primero que $n = 1$ y que $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$. Sean A, B dos conjuntos compactos en $\mathbb{R}$ tales que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Es claro que

$$A + B \supseteq (\text{mín} A + B) \cup (A + \text{máx} B),$$

y

$$(\text{mín} A + B) \cap (A + \text{máx} B) = \text{mín} A + \text{máx} B,$$

que tiene volumen 0, así que tenemos

$$|A + B|_1 \geq |A|_1 + |B|_1$$

para conjuntos compactos en $\mathbb{R}$ y siguiendo un procedimiento de aproximación, para cualquier pareja de conjuntos borelianos en $\mathbb{R}$.

Entonces, $\forall\ 0 \leq \text{t} < 1$, siendo que

$$\{z \in \mathbb{R} \mid h(z) \geq t\} \supseteq (1-\lambda)\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq t\} + \lambda\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \geq t\}$$

y que los conjuntos $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq t\}$ y $\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \geq t\}$ son no vacíos debido a que $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$, tenemos pues que, utilizando el lema anterior,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(z)dz &= \int_0^1 |\{z \in \mathbb{R} \mid h(z) \geq t\}|dt \geq (1-\lambda) \int_0^1 |\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq t\}|dt + \lambda \int_0^1 |\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \geq t\}|dt \\ &= (1-\lambda) \int_{\mathbb{R}} f(x)dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} g(y)dy \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)dy \right)^{\lambda},\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da por la desigualdad aritmético-geométrica.

Supongamos ahora que no necesariamente tenemos que $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$ y consideremos las siguientes funciones: $\hat{f} = \frac{f}{\|f\|_\infty}$, $\hat{g} = \frac{g}{\|g\|_\infty}$ y $\hat{h} = \frac{h}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^{\lambda}}$, que son medibles no negativas definidas en $\mathbb{R}$ por serlo las f, g y h del enunciado. Obviamente, $\hat{f}$ y $\hat{g}$ tienen norma infinito 1. Además, por la hipótesis del enunciado sobre f, g y h que nos dice que $f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \leq h(z)$ si $z = (1-\lambda)x + \lambda y$, tenemos que, en ese caso,

$$\hat{f}(x)^{1-\lambda} \hat{g}(y)^{\lambda} = \left(\frac{f(x)}{\|f\|_\infty} \right)^{1-\lambda} \left(\frac{g(y)}{\|g\|_\infty} \right)^{\lambda} = \frac{f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^{\lambda}} \leq \frac{h(z)}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^{\lambda}} = \hat{h}(z),$$

y aplicando el resultado ya demostrado a $\hat{f}$, $\hat{g}$ y $\hat{h}$, podemos obtener las tesis del teorema en dimensión $n = 1$ para f, g y h sin la hipótesis adicional $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$, y queda demostrado el caso $n = 1$ en su totalidad.

El caso n>1 es deducido por inducción. Fijando $x_1 \in \mathbb{R}$, definimos $f_{x_1} : \mathbb{R}^{n-1} \to [0, +\infty)$, dada por $f_{x_1}(x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Por las hipótesis sobre f, g y h, siempre que $z_1 = (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1$, tenemos que

$$h_{z_1}((1-\lambda)(x_2,\dots,x_n)+\lambda(y_2,\dots,y_n)) \geq f_{x_1}(x_2,\dots,x_n)^{1-\lambda} g_{y_1}(y_2,\dots,y_n)^{\lambda},$$

para todo $(x_2,\dots,x_n),(y_2,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Por hipótesis de inducción,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(\bar{z})d\bar{z} \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(\bar{x})d\bar{x}\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(\bar{y})d\bar{y}\right)^{\lambda},$$

donde en esta última expresión denotamos por $\bar{x} = (x_2,\dots,x_n)$, $\bar{y} = (y_2,\dots,y_n)$ y $\bar{z} = (z_2,\dots,z_n)$.

Aplicando de nuevo la desigualdad para n=1 y el teorema de Fubini a las funciones $f_1(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(\bar{x})d\bar{x}$, $g_1(y_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(\bar{y})d\bar{y}$ y $h_1(z_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(\bar{z})d\bar{z}$, obtenemos el resultado. $\square$

Si aplicamos esta desigualdad a $f = \chi_A$ y $g = \chi_B$, funciones características de A y B, tomando borelianos en $\mathbb{R}^n$ obtenemos la desigualdad $a)$ en el Teorema 2,1. Procedamos ahora ver que las tres expresiones de este teorema son equivalentes:

Lema 2.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $|(1-\lambda)A+\lambda B| \geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda}$*, para todo* A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *borelianos no vacíos y para todo* $0 \leq \lambda \leq 1$*;*

b) $|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}$*, para todo* A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *borelianos no vacíos;*

c) $|(1-\lambda)A+\lambda B|^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}}$*, para todo* A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *borelianos no vacíos y para todo* $0 \leq \lambda \leq 1$.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que $a)$ se cumple. Dados A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ borelianos no vacíos y tomando

$$A' = \frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}}, \quad B' = \frac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}}$$

en $a)$, se obtiene $b)$.

b) $\Rightarrow$ c) Supongamos que $b)$ se cumple. Dados A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ y dado $0 \leq \lambda \leq 1$, tomando $A' = (1-\lambda)A$ y $B' = \lambda B$ en $b)$ se obtiene $c)$.

c) $\Rightarrow$ a) Por último, supongamos que $c)$ se cumple. Dados A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ borelianos no vacíos, basta aplicar la desigualdad artimético-geométrica en $c)$ para obtener $a)$.

$\square$

Observación. La desigualdad $a)$ es una versión adimensional de la desigualdad de Brunn-Minkowski (notar que en este caso el conjunto $(1-\lambda)A+\lambda B$ es medible).

Capítulo 3

Desigualdades de Rogers-Shephard

Para cualquier cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, Rogers y Shephard dieron las tres siguientes desigualdades geométricas, que relacionan el volumen de tres cuerpos cuerpos convexos simétricos (el segundo respecto del punto $(0,\ \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^{n+1}$) obtenidos a partir de K con el volumen de K.

$$|K - K| \leq \binom{2n}{n} |K|, \tag{3.1}$$

$$|\mathrm{conv}\{K \times \{0\},\ -K \times \{1\}\}| \leq \frac{2^n}{n+1} |K|, \tag{3.2}$$

$$|\mathrm{conv}\{K,\ -K\}| \leq 2^n |K|,\ \text{si } 0 \in K. \tag{3.3}$$

La primera fue demostrada por estos dos matemáticos en 1957 ([5]) y las otras dos surgen como consecuencia de otra desigualdad que demostraron poco después que relaciona el volumen de un cuerpo convexo con el volumen de una proyección sobre un subespacio k-dimensional y una sección ortogonal ([6]). Esta desigualdad se verá en el Teorema 3.2 de este mismo capítulo, y también permitió redemostrar la primera de las desigualdades.

Comencemos demostrando una serie de lemas que serán necesarios para demostrar estas desigualdades:

Lema 3.1. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo que contiene a 0 y sea $f : D \to [0,\ +\infty)$ una función p-cóncava que alcanza su máximo en 0. Entonces, para todo $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ tenemos:*

$$\frac{\{f\ \geq\ \theta_1 \|f\|_\infty\}}{1 - \theta_1^p} \subseteq \frac{\{f\ \geq\ \theta_2 \|f\|_\infty\}}{1 - \theta_2^p}$$

y

$$\{f\ \geq\ \theta_1 \|f\|_\infty\} \supseteq \{f\ \geq\ \theta_2 \|f\|_\infty\}.$$

Demostración. Para cualquier $0\ \leq\ \lambda\ \leq\ 1$, como f^p es cóncava por ser f p-cóncava y por cumplirse que $\|f\|_\infty = f(0)$ por alcanzar f su máximo en 0, tenemos que para cualquier $0 < \theta_1 < 1$ se cumple que

$$\lambda\{f\ \geq\ \theta_1\|f\|_\infty\} \subseteq \lambda\{f^p\ \geq\ \theta_1^p\|f\|_\infty^p\} + (1-\lambda)\{f^p\ \geq\ \|f\|_\infty^p\} \subseteq$$

$$\subseteq \{f^p\ \geq\ (\lambda\theta_1^p + (1-\lambda))\|f\|_\infty^p\} = \{f^p\ \geq\ (1 - \lambda(1-\theta_1^p))\|f\|_\infty^p\}$$

donde que $f(0) = \|f\|_\infty$ se aplica en el primer contenido, ya que $0 \in (1-\lambda)\{f^p\ \geq\ \|f\|_\infty^p\}$.

Tomamos $\lambda = \dfrac{1-\theta_2^p}{1-\theta_1^p}$, que es mayor que 0 si $0 < \theta_1 < 1$ y $0 < \theta_2 < 1$; y menor que 1 si además $1-\theta_2^p < 1-\theta_1^p \Leftrightarrow \theta_1^p < \theta_2^p \Leftrightarrow \theta_1 < \theta_2$. Con este λ, tenemos

$$\frac{1-\theta_2^p}{1-\theta_1^p}\{f \,\geq\, \theta_1\|f\|_\infty\} \subseteq \{f \,\geq\, \theta_2\|f\|_\infty\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\{f \,\geq\, \theta_1\|f\|_\infty\}}{1-\theta_1^p} \subseteq \frac{\{f \,\geq\, \theta_2\|f\|_\infty\}}{1-\theta_2^p},$$

con lo que queda demostrado el primer contenido para cualesquiera $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$.

El segundo contenido, teniendo en cuenta que $\theta_1 < \theta_2$, es inmediato.

□

Como consecuencia directa del lema anterior, tenemos el siguiente:

Lema 3.2. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo con $0 \in D$ y $f : D \to [0, +\infty)$ una función p-cóncava no idénticamente nula, con $\|f\|_\infty = f(0)$, es decir, tal que alcanza el máximo en 0. Entonces,*

$$|D| \leq \binom{n+\frac{1}{p}}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{\|f\|_\infty} dx.$$

Demostración. Por el lema anterior, para todo $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, tenemos

$$\frac{\{f \,\geq\, \theta_1\|f\|_\infty\}}{1-\theta_1^p} \subseteq \frac{\{f \,\geq\, \theta_2\|f\|_\infty\}}{1-\theta_2^p},$$

es decir, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\chi_{\frac{\{f \,\geq\, \theta_1\|f\|_\infty\}}{1-\theta_1^p}}(x) \leq \chi_{\frac{\{f \,\geq\, \theta_2\|f\|_\infty\}}{1-\theta_2^p}}(x).$$

Supongamos que $x_0 \in int(D)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subseteq int(D)$. Sea

$$m = \text{mín}\{f(x) \mid x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}\}.$$

Tenemos que $m > 0$ ya que $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subseteq int(D)$ y $f(x) > 0$, $\forall\, x \in int(D)$ por el Lema 1.1. Escribiendo $m = \theta_0'\|f\|_\infty$ para un $\theta_0' > 0$ tenemos que $\forall\, \theta \in (0, \theta_0')$ se cumple que $f(x) \geq \theta\|f\|_\infty\ \forall\, x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$.

Además, existe un θ_0'' tal que $\forall\, \theta \in (0, \theta_0'')$ se cumple que $(1-\theta^p)x_0 \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ y por lo tanto, tomando $\theta_0 = \text{mín}\{\theta_0', \theta_0''\}$, se cumple que $\forall\, \theta \in (0, \theta_0)$

$$(1-\theta^p)x_0 \in \{f(x) \geq \theta\|f\|_\infty\} \Leftrightarrow x_0 \in \frac{\{f(x) \geq \theta\|f\|_\infty\}}{1-\theta^p}.$$

Así,

$$\chi_{int(D)}(x) = \lim_{\theta_1 \to 0^+} \chi_{\frac{\{f \geq \theta_1\|f\|_\infty\}}{1-\theta_1^p}}(x) \leq \chi_{\frac{\{f \geq \theta_2\|f\|_\infty\}}{1-\theta_2^p}}(x)$$

o, equivalentemente,

$$int(D) \subseteq \frac{\{f \,\geq\, \theta_2\|f\|_\infty\}}{1-\theta_2^p}, \quad \forall\, \theta_2 \in (0, 1).$$

Multiplicando ambos lados de la relación de contenido anterior por $(1-\theta_2^p)$, obtenemos

$$(1-\theta_2^p)int(D) \subseteq \{f \ \geq \ \theta_2\|f\|_\infty\}, \quad \forall\, \theta_2 \in (0,\ 1),$$

y tomando volúmenes,

$$(1-\theta_2^p)^n|int(D)| \leq |\{f \ \geq \ \theta_2\|f\|_\infty\}|, \quad \forall\, \theta_2 \in (0,\ 1).$$

A continuación, integramos respecto a θ_2 y teniendo en cuenta que $|D| = |int(D)|$,

$$\int_0^1 (1-\theta_2^p)^n d\theta_2 |D| \leq \int_0^1 |\{f \ \geq \ \theta_2\|f\|_\infty\}| d\theta_2, \tag{3.4}$$

donde realizando el cambio de variable $\theta_2 = x^{\frac{1}{p}}$, $d\theta_2 = \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}dx$ en el lado izquierdo de la desigualdad anterior, este lado queda como

$$\int_0^1 (1-\theta_2^p)^n d\theta_2|D| = \int_0^1 \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}(1-x)^n dx|D| = \frac{1}{p}\beta\left(\frac{1}{p},\ n+1\right)|D| =$$

$$= \frac{1}{p}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+n+1\right)}|D| = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+n+1\right)}|D| = \frac{1}{\binom{n+\frac{1}{p}}{n}}|D|.$$

Por el Lema 2.1 del segundo capítulo, el lado derecho de la desigualdad (3.4) es igual a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{\|f\|_\infty}dx$. Por tanto, la desigualdad (3.4) queda como

$$\frac{|D|}{\binom{n+\frac{1}{p}}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{\|f\|_\infty}dx.$$

Para terminar, despejando de aquí el volumen de D, se obtiene el resultado.

□

3.1. Primera desigualdad de Rogers-Shephard

En esta sección vamos a dar una primera demostración de la desigualdad (3.1). Para ello estudiaremos primero la concavidad de la función definida en el siguiente lema:

Lema 3.3. *Sean $K,\ L \subseteq \mathbb{R}^n$ cuerpos convexos. Entonces, la función $f : K+L \to [0,\ +\infty)$ dada por $f(x) = |K \cap (x-L)|$ es $\frac{1}{n}$-cóncava.*

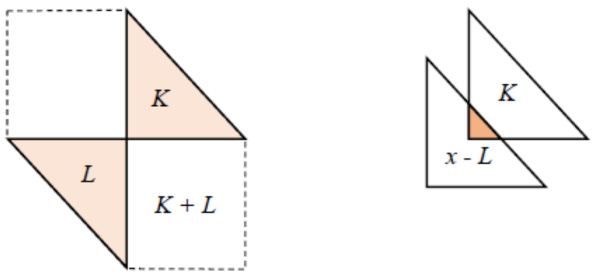

Figura 3.1: Tomando $L = -K$, el área sombreada de la segunda figura es $K \cap (x-L)$, con $x \in K+L$.

Demostración. Por definición de función $\frac{1}{n}$-cóncava, hemos de ver que $f^{\frac{1}{n}}$ es cóncava, con $f^{\frac{1}{n}}(x) = |K \cap (x-L)|^{\frac{1}{n}}$. Al poderse escribir la suma de Minkowski como $K+L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid K \cap (x-L) \neq \emptyset\}$ y por ser K y L compactos, la función f está bien definida.

Sean $x,\ y \in K+L$ cualesquiera y sea $\lambda \in [0,\ 1]$. Entonces,

$$(1-\lambda)f^{\frac{1}{n}}(x) + \lambda f^{\frac{1}{n}}(y) = (1-\lambda)|K \cap (x-L)|^{\frac{1}{n}} + \lambda |K \cap (y-L)|^{\frac{1}{n}} \leq$$

$$\leq |(1-\lambda)\,[K \cap (x-L)] + \lambda\,[K \cap (y-L)]|^{\frac{1}{n}} \leq |K \cap [(1-\lambda)(x-L) + \lambda(y-L)]|^{\frac{1}{n}} =$$

$$= |K \cap ([(1-\lambda)x + \lambda y] - L)|^{\frac{1}{n}} = f^{\frac{1}{n}}((1-\lambda)x + \lambda y),$$

donde la primera desigualdad se da por el apartado $c)$ del Teorema 2.1 del capítulo sobre la desigualdad de Brunn-Minkowski, la segunda desigualdad se debe a que K es convexo y la penúltima igualdad a que $(1-\lambda)L + \lambda L = L$, por ser L convexo.

□

Con todo esto tenemos ya las herramientas necesarias para a continuación demostrar el teorema que nos dará como consecuencia la primera de las desigualdades de Rogers-Shephard.

Teorema 3.1. *Sean $K,\ L \subseteq \mathbb{R}^n$ dos cuerpos convexos tales que $\max_{x_0 \in \mathbb{R}^n} |K \cap (x_0 - L)| = |K \cap (-L)|$. Entonces,*

$$|K+L| \cdot |K \cap (-L)| \leq \binom{2n}{n} |K| \cdot |L|.$$

Demostración. (Inspirada en la primera demostración dada por Rogers y Shephard en [5] y demostrada explícitamente de esta manera en [2].)

Considerando la suma de Minkowski $K+L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid K \cap (x-L) \neq \emptyset\}$ tomamos $f : K+L \to [0,\ +\infty)$ dada por $f(x) = |K \cap (x-L)|$ que, por el lema anterior, es $\frac{1}{n}$-cóncava.

Por el Lema 3.2 de este capítulo, si tomamos el volumen de $K+L$ obtenemos

$$|K+L| \leq \binom{2n}{n} \frac{1}{|K \cap (-L)|} \int_{\mathbb{R}^n} |K \cap (x-L)| dx.$$

Además

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K \cap (x-L)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K \cap (x-L)}(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \chi_{x-L}(y) dy dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \chi_{x-L}(y) dx dy$$

habiendo aplicado el teorema de Fubini en la última igualdad. Teniendo en cuenta que $y \in x-L \Leftrightarrow y-x \in -L \Leftrightarrow x-y \in L \Leftrightarrow x \in y+L$, se tiene que esta última integral es

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{y+L}(x) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) |y+L| dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) |L| dy = |L| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) dy = |L| \cdot |K|,$$

ya que $|L| = |y+L|$. Por tanto,

$$|K+L| \leq \binom{2n}{n} \frac{1}{|K\cap(-L)|} \int_{\mathbb{R}^n} |K\cap(x-L)|dx = \binom{2n}{n} \frac{|K|\cdot|L|}{|K\cap(-L)|},$$

y multiplicando por $|K\cap(-L)|$ a ambos lados de la igualdad, obtenemos el resultado buscado.

$\square$

Observación. Si K y L no cumplen la hipótesis $\max\limits_{x_0\in\mathbb{R}^n} |K\cap(x_0-L)| = |K\cap(-L)|$, tomando $L_1 = -x_0+L$ con x_0 un punto en el que se alcanza el máximo de la función $f(x) = |K\cap(x-L)|$ tenemos que K y L_1 cumplen que

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} |K\cap(x-L_1)| = \max_{x\in\mathbb{R}^n} |K\cap(x+x_0-L)| = \max_{y\in\mathbb{R}^n} |K\cap(y-L)| = |K\cap(x_0-L)| = |K\cap(-L_1)|.$$

Teniendo en cuenta además que

$$|K+L_1| = |K+(-x_0+L)| = |-x_0+(K+L)| = |K+L|$$

y que

$$|L_1| = |-x_0+L| = |L|$$

se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1. *Sean $K,\ L \subseteq \mathbb{R}^n$ cuerpos convexos. Entonces,*

$$|K+L| \max_{x_0\in\mathbb{R}^n} |K\cap(x_0-L)| \leq \binom{2n}{n} |K|\cdot|L|.$$

Como consecuencia del Teorema 3.1 tenemos el siguiente corolario, obteniendo así la primera de las desigualdades de Rogers-Shephard, la cual ya ha sido mencionada en la introducción en (3.1).

Corolario 3.2. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces,*

$$|K-K| \leq \binom{2n}{n} |K|.$$

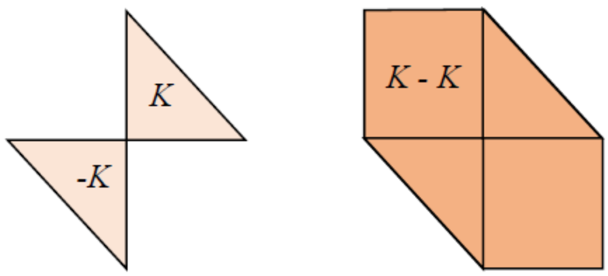

Figura 3.2: Primera desigualdad de Rogers Shephard. K es un cuerpo convexo no simétrico y $K-K$ su simetrización. Si $n=2$, $\binom{2n}{n} = 6$.

Demostración. Teniendo en cuenta el corolario anterior y tomando $L = -K$, se tiene $\max\limits_{x_0\in\mathbb{R}^n} |K\cap(x_0+K)| = |K\cap(0+K)| = |K|$, y entonces

$$|K|\cdot|K-K| \leq \binom{2n}{n} |K|^2 \Leftrightarrow |K-K| \leq \binom{2n}{n} |K|.$$

$\square$

3.2. Segunda desigualdad de Rogers-Shephard

En [6], Rogers y Shephard dieron una nueva demostración del Teorema 3.1 así como de las demás desigualdades mencionadas al inicio de este último capítulo. Esta nueva demostración se basa en el estudio de la función que aparece en el siguiente Lema:

Lema 3.4. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $H \in G_{n,\,k}$ un subespacio lineal k-dimensional. La función $f : P_{H^\perp}K \to [0,\ +\infty)$ dada por $f(x) = |K \cap (x+H)|$ es $\frac{1}{k}$-cóncava, donde $|\cdot|$ denota el volumen k-dimensional en $x+H$.*

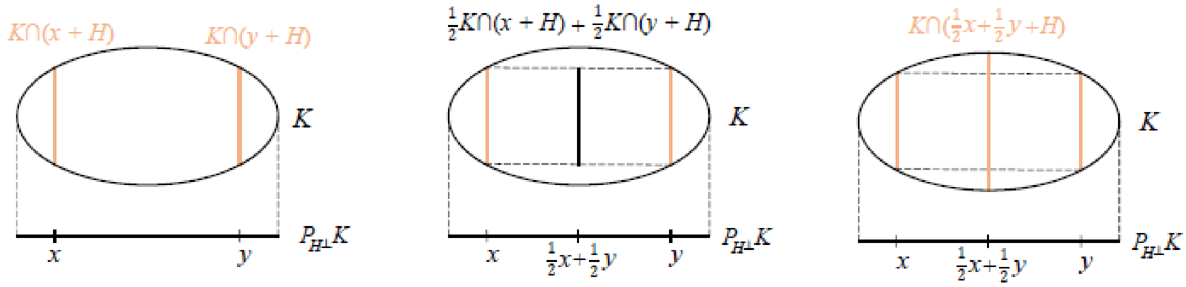

Figura 3.3: La figura de la izquierda nos muestra cómo es la función f; en las dos figuras de la derecha vemos que para dos cortes paralelos, el corte en la combinación convexa (véase la figura de la derecha) es más grande que la combinación convexa de los cortes (véase la figura del medio).

Demostración. Por definición de función $\frac{1}{k}$-cóncava, hemos de ver que $f^{\frac{1}{k}}$ es cóncava, donde $f^{\frac{1}{k}}(x) = |K \cap (x+H)|^{\frac{1}{k}}$. Como $P_{H^\perp}K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid K \cap (x+H) \neq \emptyset\}$ y K es compacto, la función f está bien definida.

Como K es convexo, para todo $x,\ y \in P_{H^\perp}K$ se tiene que

$$(1-\lambda)(K\cap(x+H))+\lambda(K\cap(y+H)) \subseteq K\cap((1-\lambda)(x+H)+\lambda(y+H)) = K\cap((1-\lambda)x+\lambda y+H),$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que H es convexo. Proyectando sobre H y teniendo en cuenta que $P_H(A+B) = P_H(A)+P_H(B)$ para cualesquiera conjuntos $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$, obtenemos

$$\begin{aligned}(1-\lambda)P_H(K\cap(x+H))+\lambda P_H(K\cap(y+H)) =& P_H((1-\lambda)(K\cap(x+H))+\lambda(K\cap(y+H))) \subseteq \\ \subseteq& P_H(K\cap((1-\lambda)x+\lambda y+H)).\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Brunn-Minkowski en H identificado con $\mathbb{R}^k$, tenemos que

$$(1-\lambda)|P_H(K\cap(x+H))|^{\frac{1}{k}}+\lambda|P_H(K\cap(y+H))|^{\frac{1}{k}} \leq |P_H(K\cap((1-\lambda)x+\lambda y+H))|^{\frac{1}{k}}$$

y, teniendo en cuenta que $\forall\ x \in H^\perp$ se satisface que $K\cap(x+H)$ está contenido en un subespacio afín paralelo a H y, por lo tanto,

$$|P_H(K\cap(x+H))| = |K\cap(x+H)|,$$

se tiene que

$$(1-\lambda)|K\cap(x+H)|^{\frac{1}{k}}+\lambda|K\cap(y+H)|^{\frac{1}{k}} \leq |K\cap((1-\lambda)x+\lambda y+H)|^{\frac{1}{k}}.$$

Es decir, que

$$(1-\lambda)f(x)^{\frac{1}{k}}+\lambda f(y)^{\frac{1}{k}} \leq f((1-\lambda)x+\lambda y)^{\frac{1}{k}},$$

como queríamos demostrar.

□

Como consecuencia tenemos el siguiente lema:

Lema 3.5. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $H \in G_{n,\,k}$ un subespacio lineal k-dimensional. Supongamos que $\max\limits_{x_0 \in H^\perp} |K \cap (x_0 + H)| = |K \cap H|$. Entonces,*

$$|P_{H^\perp}K| \cdot |K \cap H| \leq \binom{n}{k} |K|.$$

Demostración. Sea $f : P_{H^\perp}K \to [0,\ +\infty)$ la función dada por $f(x) = |K \cap (x + H)|$.
Como $\max\limits_{x_0 \in H^\perp} |K \cap (x_0 + H)| = |K \cap H|$ por hipótesis del enunciado, tenemos que $0 \in P_{H^\perp}K$ y que $\|f\|_\infty = f(0)$.

Por el Lema 3.4, f es $\frac{1}{k}$-cóncava y, por el Lema 3.2,

$$|P_{H^\perp}K| \leq \binom{n-k+k}{n-k} \int_{P_{H^\perp}K} \frac{|K \cap (x+H)|}{|K \cap H|} dx.$$

Como por el teorema de Fubini se tiene que

$$\int_{P_{H^\perp}K} |K \cap (x+H)| dx = |K|,$$

tenemos que

$$|P_{H^\perp}K| \cdot |K \cap H| \leq \binom{n}{k} |K|,$$

como queríamos demostrar.

□

Observación. Si K no cumple la hipótesis del enunciado del Lema 3.2 que nos dice que

$$\max_{x_0 \in H^\perp} |K \cap (x_0 + H)| = |K \cap H|,$$

tomando $K_1 = -x_0 + K$ con $x_0 \in H^\perp$ un punto en el que se alcanza el máximo de la función $f : P_{H^\perp}K \to [0,\ +\infty)$ dada por $f(x) = |K \cap (x + H)|$, tenemos que K_1 y H cumplen que

$$\begin{aligned}\max_{x \in H^\perp} |K_1 \cap (x+H)| &= \max_{x \in H^\perp} |(-x_0 + K) \cap (x+H)| = \max_{x \in H^\perp} |K \cap ((x + x_0) + H)| = \\ &= \max_{y \in H^\perp} |K \cap (y+H)| = |K \cap (x_0 + H)| = |(-x_0 + K) \cap H| = |K_1 \cap H|.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora que

$$|K_1| = |-x_0 + K| = |K|$$

y que

$$|P_{H^\perp}K_1| = |P_{H^\perp}(-x_0 + K)| = |-x_0 + P_{H^\perp}K| = |P_{H^\perp}K|$$

se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $H \in G_{n,\,k}$ un subespacio lineal k-dimensional. Entonces,*

$$|P_{H^\perp}K| \max_{x_0 \in H^\perp} |K \cap (x_0 + H)| \leq \binom{n}{k} |K|.$$

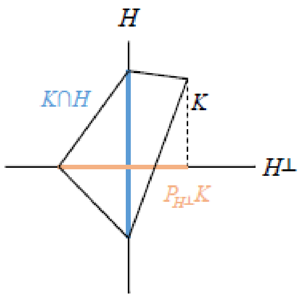

Figura 3.4: En este dibujo vemos la situación de igualdad, es decir, cuando $|P_{H^\perp}K| \max_{x_0 \in H^\perp} |K \cap (x_0 + H)| = \binom{n}{k}|K|$. Nótese que tomamos $x_0 = 0$.

Antes de demostrar la segunda desigualdad de Rogers-Shephard, vamos a mostrar cómo a partir de esta desigualdad se puede volver a demostrar el Teorema 3.1, tras recordar el enunciado de este.

Sean $K,\ L \subseteq \mathbb{R}^n$ dos cuerpos convexos tales que $\max\limits_{x_0 \in \mathbb{R}^n} |K \cap (x_0 - L)| = |K \cap (-L)|$. *Entonces,*

$$|K + L| \cdot |K \cap (-L)| \leq \binom{2n}{n} |K| \cdot |L|.$$

Demostración. Dados K y L dos cuerpos convexos, consideremos el cuerpo convexo $C \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ dado por $C = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in K,\ x - y \in -L\}$.

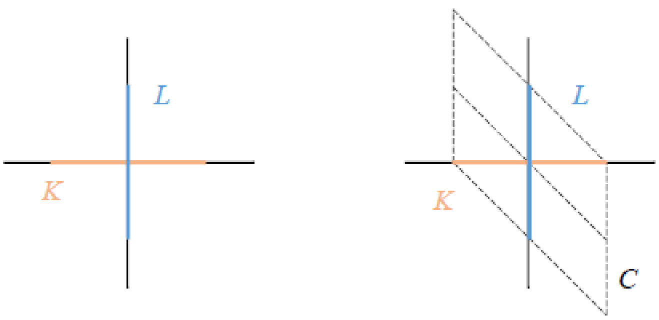

Figura 3.5: Tomando K y L genéricos, el área encerrada por las líneas discontinuas en la fiigura de la derecha es el cuerpo convexo C.

Veamos que C es, efectivamente, convexo.

Sea $0 \leq \lambda \leq 1$ y sean $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2) \in C$.
Como K es convexo y $x_1,\ x_2 \in K$ entonces $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in K$. Además,

$$[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2]-[(1-\lambda)y_1+\lambda y_2]=(1-\lambda)(x_1-y_1)+\lambda(x_2-y_2)\in -L,$$

ya que $-L$ es convexo y $x_1-y_1,\ x_2-y_2\in -L$.

Sea $H=\{(x,\ 0)\in\mathbb{R}^{2n}\mid x\in\mathbb{R}^n\}\in G_{2n,\ n}$. Observamos que $H^{\perp}=\{(0,\ y)\in\mathbb{R}^{2n}\mid y\in\mathbb{R}^n\}\in G_{2n,\ n}$ y que

$$(x,\ 0)\in P_HC\Leftrightarrow x\in\{x\in K\mid \exists\, y\in\mathbb{R}^n \text{ tal que } x-y\in -L\}=K,$$

ya que si tomamos $z_0\in -L$, para todo $x\in K$ se tiene que existe $y=x-z_0$ tal que $x-y=z_0\in -L$. Por lo tanto, $P_HC=K\times\{0\}$. Además, para todo $(x_0,\ 0)\in P_HC=K\times\{0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} C\cap((x_0,\ 0)+H^{\perp}) =&\{(x_0,\ y)\in\mathbb{R}^{2n}\mid x_0-y\in -L\}=\{(x_0,\ y)\in\mathbb{R}^{2n}\mid -y\in -x_0-L\}=\\ =&\{(x_0,\ y)\in\mathbb{R}^{2n}\mid y\in x_0-L\}=\{x_0\}\times(x_0+L).\end{aligned}$$

Así, tenemos que $|P_HC|=|K|$, y que $\max\limits_{(x,\ 0)\in P_HC}|C\cap(x_0+H^{\perp})|=\max\limits_{x_0\in P_HC}|x_0+L|=|L|$ y, por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}|C|&=\int_{P_HC}|C\cap(x_0+H^{\perp})|dx=\int_{P_HC}|x+L|dx=\\ &=\int_{P_HC}|L|dx=|L|\cdot|P_HC|=|L|\cdot|K|.\end{aligned}$$

Observamos además que

$$\begin{aligned}(0,\ y)\in P_{H^{\perp}}C\Leftrightarrow y\in&\{y\in\mathbb{R}^n\mid \exists\, x\in K \text{ tal que } x-y\in -L\}=\\ =&\{y\in\mathbb{R}^n\mid \exists\, x\in K \text{ tal que } x\in y-L\}=\\ =&\{y\in\mathbb{R}^n\mid K\cap(y-L)\neq\emptyset\}=K+L,\end{aligned}$$

luego $P_{H^{\perp}}C=\{0\}\times(K+L)$.

Además, para todo $(0,\ y_0)\in P_{H^{\perp}}C$,

$$(x,\ y_0)\in C\cap((0,\ y_0)+H)\Leftrightarrow x\in\{x\in K\mid x-y_0\in -L\}=$$

$$=\{x\in K\mid x\in y_0-L\}=K\cap(y_0-L),$$

luego $C\cap((0,\ y_0)+H)=(K\cap(y_0-L))\times\{y_0\}$.

Por el Corolario 3.3,

$$|P_{H^{\perp}}C|\max_{(0,\ y_0)\in P_{H^{\perp}}C}|C\cap((0,\ y_0)+H)|\leq\binom{2n}{n}|C|,$$

es decir,

$$|K+L|\cdot\max_{y_0\in\mathbb{R}^n}|K\cap(y_0-L)|\leq\binom{2n}{n}|K|\cdot|L|.$$

□

La segunda desigualdad de Rogers-Shephard se obtendrá como consecuencia del siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Sean $K,\ L \subseteq \mathbb{R}^n$ dos cuerpos convexos. Entonces,*

$$|\mathrm{conv}\{L\times\{0\},\ -K\times\{1\}\}|\cdot|K\cap L|\leq\frac{2^n}{n+1}|K|\cdot|L|.$$

Demostración. Sea $C\subseteq\mathbb{R}^{2n+1}$ el cuerpo convexo definido de la siguiente manera:

$$C=\{(x,\ y,\ \theta)\in\mathbb{R}^{2n+1}\mid x\in\theta K,\ x+y\in(1-\theta)L,\ \theta\in[0,\ 1]\}.$$

Observemos que C es, efectivamente, convexo:
Sean $(x_1,\ y_1,\ \theta_1),\ (x_2,\ y_2,\ \theta_2)\in C$ y $0\ \leq\ \lambda\ \leq\ 1$. Entonces, como K es convexo, $(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\in(1-\lambda)\theta_1K+\lambda\theta_2K=((1-\lambda)\theta_1+\lambda\theta_2)K$ y, como L es convexo,

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)x_1+\lambda x_2+(1-\lambda)y_1+\lambda y_2=(1-\lambda)(x_1+y_1)+\lambda(x_2+y_2)\in\\&\in(1-\lambda)(1-\theta_1)L+\lambda(1-\theta_2)L=((1-\lambda)(1-\theta_1)+\lambda(1-\theta_2))L=\\&=(1-\theta_1-\lambda+\lambda\theta_1+\lambda-\lambda\theta_2)L=(1-((1-\lambda)\theta_1+\lambda\theta_2))L,\end{aligned}$$

y así, $(1-\lambda)(x_1,\ y_1,\ \theta_1)+\lambda(x_2,\ y_2,\ \theta_2)\in C$.

Calculemos ahora el volumen de C:

Sea $H_1=\{(0,\ y,\ 0)\mid y\in\mathbb{R}^n\}\in G_{2n+1,\ n}$. Observamos que $H_1^\perp=\{(x,\ 0,\ \theta)\mid x\in\mathbb{R}^n,\ \theta\in\mathbb{R}\}\in G_{2n+1,\ n+1}$ y que para cada $(x_0,\ 0,\ \theta_0)\in P_{H_1^\perp}C$ se tiene que

$$\begin{aligned}C\cap(((x_0,\ 0,\ \theta_0))+H_1)=&\{(x_0,\ y,\ \theta_0)\mid x_0\in\theta_0K,\ x_0+y\in(1-\theta_0)L,\ \theta_0\in[0,\ 1]\}=\\=&\{(x_0,\ y,\ \theta_0)\mid x_0\in\theta_0K,\ y\in -x_0+(1-\theta_0)L,\ \theta_0\in[0,\ 1]\},\end{aligned}$$

donde esta intersección es no vacía si $\theta_0\in[0,\ 1]$ y $x_0\in\theta_0K$, luego $P_{H_1^\perp}C=\{(x,\ 0,\ \theta)\mid\theta\in[0,\ 1],\ x\in\theta K\}$ y, para cada $(x_0,\ 0,\ \theta_0)\in P_{H_1^\perp}C$, tenemos que

$$C\cap((x_0,\ 0,\ \theta_0)+H_1)=\{x_0\}\times(-x_0+(1-\theta_0)L)\times\{\theta_0\}$$

y así,

$$|C\cap(((x_0,\ 0,\ \theta_0))+H_1)|=|-x_0+(1-\theta_0)L|=|(1-\theta_0)L|=(1-\theta_0)^n|L|.$$

Por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}|C|=&\int_{P_{H^\perp}C}|C\cap(((x,\ 0,\ \theta))+H_1)|dxd\theta=\int_{P_{H^\perp}C}(1-\theta)^n|L|dxd\theta=\\=&\int_0^1\int_{\theta K}(1-\theta)^n|L|dxd\theta=\int_0^1\theta^n(1-\theta)^n|L|\int_K dzd\theta=\\=&\int_0^1\theta^n(1-\theta)^nd\theta|L|\cdot|K|=\beta(n+1,\ n+1)|L|\cdot|K|=\\=&\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)}|L|\cdot|K|=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}|L|\cdot|K|.\end{aligned}$$

Considerando ahora el subespacio $H_2=\{(x,\ 0,\ 0)\mid x\in\mathbb{R}^n\}\in G_{2n+1,\ n}$ tenemos que $H_2^\perp=\{(0,\ y,\ \theta)\mid y\in\mathbb{R}^n,\ \theta\in\mathbb{R}\}\in G_{2n+1,\ n+1}$ y que

$$
\begin{aligned}
P_{H_2^\perp}C =&\{(0,\ y,\ \theta) \mid \exists\, x\in\mathbb{R}^n \text{ tal que } x\in\theta K,\ x+y\in(1-\theta)L,\ \theta\in[0,\ 1]\} = \\
=&\{(0,\ y,\ \theta) \mid \exists\, x\in\mathbb{R}^n \text{ tal que } x\in\theta K,\ y\in -x+(1-\theta)L,\ \theta\in[0,\ 1]\} = \\
=&\{(0,\ y,\ \theta) \mid y=-x+z, \text{ con } x\in\theta K,\ z\in(1-\theta)L,\ \theta\in[0,\ 1]\} = \\
=&\{(0,\ y,\ \theta) \mid y\in-\theta K+(1-\theta)L,\ \theta\in[0,\ 1]\} = \\
=&\{(0,\ y,\ \theta) \mid (y,\theta)\in\operatorname{conv}\{L\times\{0\},\ -K\times\{1\}\}\}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $|P_{H_2^\perp}C| = |\operatorname{conv}\{L\times\{0\},\ -K\times\{1\}\}|$. Además,

$$
\begin{aligned}
C\cap\left(\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)+H_2\right) =&\left\{\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2}\right) \mid x\in\frac{1}{2}K,\ x\in\frac{1}{2}L\right\} = \\
=&\frac{1}{2}(K\cap L)\times\{0\}\times\left\{\frac{1}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

y $\left|C\cap\left(\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)+H_2\right)\right| = \frac{1}{2^n}|K\cap L|$. Por ende, por el Corolario 3.3 tenemos que

$$
|P_{H_2^\perp}C|\cdot\left|K\cap\left(\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)+H_2\right)\right| \le |P_{H_2^\perp}C|\cdot \max_{(0,y,\theta)\in H_2^\perp}|K\cap((0,\ y,\ \theta)+H_2)| \le \binom{2n+1}{n}\cdot|C|,
$$

es decir,

$$
|\operatorname{conv}\{L\times\{0\},\ -K\times\{1\}\}|\cdot\frac{|K\cap L|}{2^n} \le \binom{2n+1}{n}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\cdot|L|\cdot|K| = \frac{1}{n+1}\cdot|L|\cdot|K|.
$$

Finalmente, con todo esto obtenemos lo que queríamos probar,

$$
|\operatorname{conv}\{L\times\{0\},\ -K\times\{1\}\}|\cdot|K\cap L| \le \frac{2^n}{n+1}|K|\cdot|L|.
$$

□

Como corolario a este Teorema obtenemos la segunda desigualdad de Rogers y Shephard, que es la desigualdad (3.2) mencionada en la introducción, siendo este corolario demostrado en las siguientes líneas:

Corolario 3.4. *Sea $K\subseteq\mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces,*

$$
|\operatorname{conv}\{K\times\{0\},\ -K\times\{1\}\}| \le \frac{2^n}{n+1}|K|.
$$

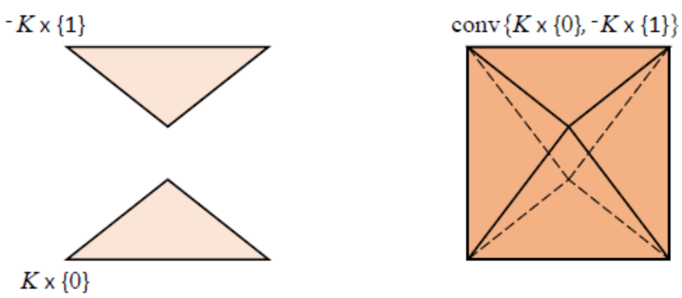

Figura 3.6: Segunda desigualdad de Rogers Shephard. K es un cuerpo convexo no simétrico y $\operatorname{conv}\{K\times\{0\},\ -K\times\{1\}\}$ su simetrización.

Demostración. Tomando en el teorema anterior $L = K$ obtenemos que

$$|\text{conv}\{K \times \{0\},\ -K \times \{1\}\}| \cdot |K \cap K| \leq \frac{2^n}{n+1}|K| \cdot |K|,$$

donde la intersección de K consigo mismo es K, lo que implica que

$$|\text{conv}\{K \times \{0\},\ -K \times \{1\}\}| \cdot |K| \leq \frac{2^n}{n+1}|K| \cdot |K|,$$

y dividiendo a ambos lados de la desigualdad por el volumen de K obtenemos el resultado buscado. □

3.3. Tercera desigualdad de Rogers-Shephard

Como consecuencia del Teorema 3.2 obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.3. *Sean $K,\ L \subseteq \mathbb{R}^n$ dos cuerpos convexos con $0 \in K \cap L$. Entonces,*

$$|\text{conv}\{K,\ -L\}| \cdot |K \cap L| \leq 2^n |K| \cdot |L|.$$

Demostración. Intercambiando el papel de K y L en el Teorema 3.2 obtenemos que

$$|\text{conv}\{K \times \{0\},\ -L \times \{1\}\}| \cdot |K \cap L| \leq \frac{2^n}{n+1}|K| \cdot |L|, \tag{3.5}$$

y tomamos ahora $H = \{(0,\ \theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \in G_{n+1,\ 1}$. Observamos que $H^\perp = \{(x,\ 0) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ y que

$$(x,\ 0) \in P_{H^\perp}\text{conv}\{K \times \{0\},\ -L \times \{1\}\} \Leftrightarrow \exists \theta \in [0,\ 1],\ x_1 \in K,\ x_2 \in -L \text{ tales que}$$

$$\begin{aligned} x =& P_{H^\perp}((1-\theta)(x_1,\ 0) + \theta(x_2,\ 1)) = P_{H^\perp}((1-\theta)x_1 + \theta x_2,\ \theta)) = \\ =& (1-\theta)x_1 + \theta x_2. \end{aligned}$$

Es decir, $(x,\ 0) \in P_{H^\perp}\text{conv}\{K \times \{0\},\ -L \times \{1\}\} \Leftrightarrow x \in \text{conv}\{K,\ -L\}$. Además, como $0 \in K \cap L$ tenemos que $0 \in K \cap (-L)$ y que $\text{conv}\{K \times \{0\},\ -L \times \{1\}\} \cap H = \{0\} \times [0,\ 1]$.

Aplicando el Corolario 3.3 obtenemos

$$|P_{H^\perp}\text{conv}\{K \times \{0\},\ -L \times \{1\}\}| \cdot |\text{conv}\{K \times \{0\},\ -L \times \{1\}\} \cap H| \leq \binom{n+1}{n} |\text{conv}\{K \times \{0\},\ -L \times \{1\}\}|,$$

es decir,

$$|\text{conv}\{K,\ -L\}| \leq (n+1)|\text{conv}\{K \times \{0\},\ -L \times \{1\}\}|$$

y, por la desigualdad (3.5),

$$|\text{conv}\{K,\ -L\}| \cdot |K \cap L| \leq 2^n |K| \cdot |L|.$$

□

Para finalizar, obtenemos como corolario de este teorema la tercera desigualdad de Rogers-Shephard mencionada en (3.3) en la introducción, la cual se deduce de la segunda desigualdad de Rogers-Shephard, enunciada en (3.2):

Corolario 3.5. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo con $0 \in K$. Entonces,*

$$|\mathrm{conv}\{K,\ -K\}| \leq 2^n |K|.$$

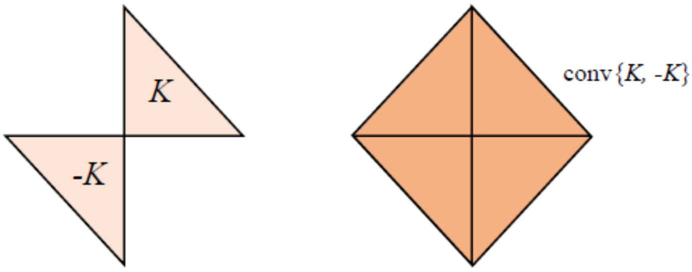

Figura 3.7: Tercera desigualdad de Rogers Shephard. K es un cuerpo convexo no simétrico y $\mathrm{conv}\{K,\ -K\}$ su simetrización. Si $n = 2$, $2^n = 4$.

Demostración. Tomamos $L = K$ en el teorema anterior. Como la intersección de K consigo mismo es K tenemos que $0 \in K = K \cap K$ y se cumplen las hipótesis del teorema. Entonces,

$$|\mathrm{conv}\{K,\ -K\}| \cdot |K \cap K| \leq 2^n |K| \cdot |K|,$$

y como $|K \cap K| = |K|$, dividiendo a ambos lados de la desigualdad por el volumen de K obtenemos la última desigualdad de Rogers-Shephard estudiadada en el capítulo.

□

Bibliografía

[1] ALONSO-GUTIÉRREZ, D.; BASTERO, J.; *Approaching the Kannan-Lovász-Simonovits and Variance Conjectures*. Lecture Notes in mathematics 2131. Springer (2015). ISBN 978-3-319-13262-4.

[2] ALONSO-GUTIERREZ, D.; JIMÉNEZ, C.H.; VILLA, R.; *Brunn-Minkowski and Zhang inequalities for convolution bodies*. Adv. in. Math. 238 (2013) pp. 50-64.

[3] BALL, K.; *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in* $\mathbb{R}^n$. Studia Math 88 (1988), 69-84.

[4] PISIER, G.; *The volume of convex bodies and Banach space geometry*. Cambrigde Tracts in Mathematics 94. Cambrigde University Press (1989). ISBN 978-0-521-36465-2.

[5] ROGERS, C. A.; SHEPHARD, G. C.; *The difference body of a convex body*. Arch. Math. (Basel) 8 (1957) pp. 220-233.

[6] ROGERS, C. A.; SHEPHARD, G. C.; *Convex bodies associated with a given convex body*. J. London. Math. Soc. 33 (1958) pp. 270-281.

[7] SCHNEIDER, R.; *Convex bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Second Expanded Edition*. Albert-Ludwigs-Universitat Freiburg, Germany. Cambrigde University Press (2014). ISBN 978-1-107-60101-7.

[8] THOMPSON, A. C.; *Minkowski Geometry, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 63*. Cambridge University Press (1996). ISBN 0-521-40472-X.

[9] WEBSTER, R.; *Convexity*. Oxford University Press (1994). ISBN 0-19-853147-8.